

Illustratie Optimaal Lifecycle Beleid

SERVAAS VAN BILSEN, ROEL MEHLKOPF

OCCASIONAL-01 / 2020

OCCASIONAL PAPERS zijn onderdeel van de **Industry Paper Series**, worden niet beoordeeld door de Netspar Editorial Board ('**non-refereed**'), maar worden onder verantwoordelijkheid van de auteurs uitgebracht.

De Occasional Papers zijn zeer actueel of functioneren als achtergrond paper bij andere Netspar publicaties.

Colofon

Netspar Occasional Paper 1, juni 2020

Netspar Occasional Papers is een uitgave van Netspar, op persoonlijke titel geschreven door de auteurs. Niets uit deze uitgave mag worden vermenigvuldigd, op welke wijze dan ook, zonder voorafgaande toestemming van de auteur(s).

Illustratie Optimaal Lifecycle Beleid
Achtergronddocument behorend bij de Netspar Brief “Renterisico, Lifecycle en
Pensioencontract.”

Servaas van Bilsen
University of Amsterdam and NETSPAR

Roel J. Mehlkopf
Cardano and NETSPAR

June 2, 2020

1 Introductie

Dit achtergronddocument laat zien hoe de numerieke illustraties ten aanzien van optimaal lifecycle beleggen uit de Netspar Brief “Renterisico, Lifecycle en Pensioencontract” tot stand zijn gekomen. Het belangrijkste resultaat is dat de gewenste afdekking van renterisico voor ouderen hoog is. [Bilsen, Boelaars, and Bovenberg \(2020\)](#) laten zien dat dit resultaat robuust is voor verschillende parameter- en modelveronderstellingen.

Dit document is als volgt georganiseerd. In Sectie 2 wordt het onderliggende model uitgelegd. We gaan dieper in op de preferenties van het individu, de veronderstelde financiële markt en het optimalisatieprobleem. Sectie 3 bestudeert de optimale individuele lifecycle strategieën. In Sectie 4 gaan we nader in op de aannames die ten grondslag liggen aan Figuren 2 en 4 uit de Netspar Brief waarin de impliciete lifecycle strategieën worden getoond in collectieve contracten. Sectie 5 bevat de conclusie.

2 Model

In deze sectie leggen we ons model uit. De optimale strategieën worden bestudeerd in Sectie 3.

2.1 Preferenties

We noteren met t de leeftijd van een individu. De leeftijd waarop een individu overlijdt is gelijk aan $T > 0$, waarbij T vooraf bekend is. Verder nemen we aan dat het verwachte nut gelijk is aan:

$$U = \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{1-\gamma} c(t)^{1-\gamma} dt \right], \quad (2.1)$$

waarbij $c(t)$ consumptie op leeftijd t voorstelt, $\delta \geq 0$ de tijdsvoorkoorparameter weergeeft, $\gamma > 0$ de mate van risicoaversiteit modelleert, en \mathbb{E} de onvoorwaardelijke verwachtingswaarde beschrijft.

2.2 Financiële Markt, Vermogensontwikkeling en Menselijk Kapitaal

Onze financiële markt bestaat uit twee toestandsvariabelen: de kortetermijnrente $r(t)$ en de aandelenprijs $S(t)$. De kortetermijnrente en de aandelenprijs worden gemodelleerd volgens [Brennan and Xia \(2002\)](#). Met andere woorden,

$$dr(t) = \kappa_r (\bar{r} - r(t)) dt + \sigma_r dZ_r(t), \quad (2.2)$$

$$dS(t) = (r(t) + \lambda_S \sigma_S) S(t) dt + \sigma_S S(t) dZ_S(t), \quad (2.3)$$

waarbij \bar{r} de verwachte kortetermijnrente op de lange termijn voorstelt, $\kappa_r \geq 0$ de mate van voorspelbaarheid van de toekomstige kortetermijnrente modelleert, λ_S de zogenaamde Sharpe ratio is, $Z(t) = (Z_r(t), Z_S(t))$ een vector met standaard Brownse processen beschrijft, en $\sigma = (\sigma_r, \sigma_S) \geq 0$ een vector met diffusiecoëfficiënten is. De correlatiecoëfficiënt tussen $dZ_r(t)$ en $dZ_S(t)$ noteren we met ρ_{rS} .

De stochastische verdisconteringsfactor $M(t)$ wordt beschreven door:

$$\frac{dM(t)}{M(t)} = -r(t)dt + \phi^\top dZ(t), \quad (2.4)$$

waarbij \top de transpositie-operatie aanduidt, en $\phi = (\phi_r, \phi_S)$ een vector met factorcoëfficiënten voorstelt. Deze vector bepaalt de vector met marktprijzen. Meer specifiek, de marktprijs voor renterisico λ_r en de marktprijs voor aandelenrisico λ_S volgen uit ϕ_r en ϕ_S als volgt:

$$\lambda_r = -\phi_r - \rho_{rS}\phi_S, \quad (2.5)$$

$$\lambda_S = -\phi_S - \rho_{rS}\phi_r. \quad (2.6)$$

Het individu belegt zijn totale vermogen – dat bestaat uit menselijk kapitaal en financieel vermogen – in een obligatie met vaste looptijd h , een aandeel en een vrij opneembare spaarrekening.

We noteren met $P(t, h)$ de prijs op leeftijd t van een nulcouponobligatie met looptijd h . De obligatieprijs wordt beschreven door (see [Appendix A.1](#)):

$$\frac{dP(t, h)}{P(t, h)} = (r(t) - \lambda_r \sigma_r B_r(h)) dt - B_r(h) \sigma_r dZ_r(t), \quad (2.7)$$

waarbij $B_r(h) = (1 - e^{-\kappa_r h}) / \kappa_r \in [0, h]$ de rentegevoeligheid van de obligatieprijs weergeeft. Merk op dat $B_r(h)$ naar h convergeert als de kortetermijnrente minder voorspelbaar wordt (dat wil zeggen, als κ_r daalt).

We noteren met $\omega(t) = (\omega_P(t), \omega_S(t))$ de vector met portefeuillegewichten. Hierbij stelt $\omega_P(t)$ het deel van het totale vermogen voor dat op leeftijd t in de obligatie met looptijd h wordt belegd, en $\omega_S(t)$ geeft het deel van het totale vermogen weer dat op leeftijd t in het aandeel wordt geïnvesteerd. Het resterende deel van het totale vermogen, $1 - \omega_P(t) - \omega_S(t)$, wordt belegd in de vrij opneembare spaarrekening. Verder noteren we met $W(t)$ het totale vermogen op leeftijd t . Dit vermogen wordt beschreven door:

$$dW(t) = (r(t) + \omega(t)^\top [\mu(t) - r(t)]) W(t)dt + \omega(t)^\top \Sigma(t) W(t) dZ(t) - c(t)dt, \quad (2.8)$$

met

$$\mu(t) = \begin{pmatrix} r(t) - \lambda_r \sigma_r B_r(h) \\ r(t) + \lambda_S \sigma_S \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \Sigma(t) = \begin{pmatrix} -B_r(h) \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_S \end{pmatrix}.$$

We beschouwen twee gevallen. Het eerste geval neemt aan dat de pensioenpremies en de AOW-uitkeringen vooraf bekend zijn en niet afhangen van de leeftijd. We kunnen nu menselijk kapitaal interpreteren als een obligatie. We noteren met $D_H(t)$ de ‘duration’ op leeftijd t van menselijk kapitaal:

$$D_H(t) = \int_0^{T-t} \frac{H(t, h)}{H(t)} B_r(h) dh, \quad (2.9)$$

waarbij $H(t, h)$ de verdisconteerde waarde voorstelt op leeftijd t van de pensioenpremie die wordt ingelegd op leeftijd $t+h$ (als $t+h$ groter is dan de pensioengerechtigde leeftijd, dan stelt $H(t, h)$ de verdisconteerde waarde voor op leeftijd t van de AOW-uitkering die wordt ontvangen op leeftijd $t+h$). Verder geldt dat $H(t) \equiv \int_0^{T-t} H(t, h) dh$. De ‘duration’ van menselijk kapitaal speelt een cruciale rol bij de bepaling van de optimale strategieën; zie Sectie 3.

Het tweede geval neemt aan dat toekomstig arbeidsinkomen en de AOW-uitkeringen vooraf bekend zijn en niet afhangen van de leeftijd. De pensioenpremies zijn in dit geval variabel. De variabele $H(t, h)$ stelt nu de verdisconteerde waarde voor op leeftijd t van arbeidsinkomen dat wordt ontvangen op leeftijd $t+h$ (als $t+h$ groter is dan de pensioengerechtigde leeftijd, dan stelt $H(t, h)$ nog steeds de verdisconteerde waarde voor op leeftijd t van de AOW-uitkering die wordt ontvangen op leeftijd $t+h$).

2.3 Maximalisatieprobleem

Het individu maximeert zijn nut onder de budgetrestrictie en lost dus het volgende maximalisatieprobleem op:

$$\begin{aligned} \max_{c(t), \omega(t)} \quad & \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{1-\gamma} c(t)^{1-\gamma} dt \right] \\ \text{s.t.} \quad & \frac{dW(t)}{W(t)} = (r(t) + \omega(t)^\top [\mu(t) - r(t)]) dt + \omega(t)^\top \Sigma(t) dZ(t) - \frac{c(t)}{W(t)} dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sectie 3 bestudeert de optimale strategieën.

2.4 Parameterwaardes

We beschouwen een individu dat begint te werken op leeftijd 20, met pensioen gaat op leeftijd 65 (dat wil zeggen, $T_R = 65 - 20 = 45$) en overlijdt op leeftijd 85 (dat wil zeggen, $T = 85 - 20 = 65$). Het individu ontvangt een constant arbeidsinkomen gedurende zijn werkzame leven (geen carrière sprongen). Zijn risicoaversiteitsparameter γ is gelijk aan 5 en zijn tijdsvoorkeurparameter δ is 3%. De verwachte kortetermijnrente op de lange termijn, \bar{r} , wordt gelijkgesteld aan 2%. We veronderstellen dat de initiële kortetermijnrente $r(0)$ gelijk is aan het langetermijngemiddelde (dat wil zeggen, $r(0) = \bar{r}$). De rentevolatiliteit σ_r is gelijk aan 1%. We veronderstellen dat de halfwaardetijd van de kortetermijnrente gelijk is aan 20 jaar. Merk op dat de halfwaardetijd de waarde van κ_r bepaalt. De marktprijs voor renterisico λ_r en de marktprijs voor aandelenrisico λ_S worden, respectievelijk, gelijkgesteld aan 7.5% en 20%. De aandelenvolatiliteit σ_S is ook gelijk aan 20%. Onze parameterwaarden impliceren een risicopremie op aandelenrisico van 4%. Deze parameterwaarden komen grofweg overeen met die van de commissie parameters en die van bijvoorbeeld [Gomes, Kotlikoff, and Viceira \(2008\)](#). Tot slot veronderstellen we dat $dZ_r(t)$ en $dZ_S(t)$ niet gecorreleerd zijn (dat wil zeggen, $\rho_{rS} = 0$).

3 Optimale Individuele Lifecycle Strategieën

3.1 Optimale Consumptie

Optimale consumptie wordt gegeven door (zie Appendix A.2 voor een bewijs)

$$c^*(t) = c^*(0) \exp \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_0^t \left(r(s) + \frac{1}{2} \phi^\top \rho \phi - \delta \right) ds - \frac{1}{\gamma} \phi^\top \int_0^t dZ(s) \right\}, \quad (3.1)$$

waarbij $c^*(0)$ de optimale consumptie op leeftijd 0 voorstelt. We kiezen $c^*(0)$ zodanig dat de marktwaarde van optimale consumptie gelijk is aan het totale vermogen.

3.2 Optimale Portefeuillegewichten

De vector met optimale portefeuillegewichten $\omega^*(t)$ wordt zodanig gekozen dat veranderingen in het totale vermogen exact gelijk zijn aan veranderingen in de marktwaarde van optimale consumptie. We vinden (zie Appendix A.2 voor een bewijs):

$$\omega_P^*(t) = \frac{1}{\gamma} \frac{\phi_r}{B_r(h) \sigma_r} + \frac{D_A(t)}{B_r(h)}, \quad (3.2)$$

$$\omega_S^*(t) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\phi_S}{\sigma_S}, \quad (3.3)$$

waarbij $D_A(t)$ de rentegevoeligheid van de optimale actuariële factor $A^*(t) \equiv W^*(t)/c^*(t)$ weergeeft. We kunnen $D_A(t)$ als volgt schrijven:

$$D_A(t) = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \int_0^{T-t} \frac{V^*(t, h)}{V^*(t)} B_r(h) dh, \quad (3.4)$$

waarbij $V^*(t, h)$ de marktwaarde op leeftijd t van optimale consumptie op leeftijd $t + h$ voorstelt. Verder geldt dat $V^*(t) \equiv \int_0^{T-t} V^*(t, h) dh$.

Het individu kan alleen zijn financieel kapitaal in de financiële markt investeren. Bij de bepaling van de portefeuillegewichten zal het individu daarom rekening houden met het feit dat hij al een financiële titel bezit (namelijk menselijk kapitaal). We noteren met $\hat{\omega}(t) = (\hat{\omega}_P(t), \hat{\omega}_S(t))$ een vector bestaande uit de portefeuillegewichten uitgedrukt in termen van financieel kapitaal. We vinden dat de optimale portefeuillegewichten $\hat{\omega}_P^*(t)$

en $\widehat{\omega}_S^*(t)$ worden gegeven door (zie Appendix A.3 voor een bewijs)

$$\widehat{\omega}_P^*(t) = \frac{W(t)}{F(t)}\omega_P^*(t) - \frac{H(t)}{F(t)}\frac{D_H(t)}{B_r(h)}, \quad (3.5)$$

$$\widehat{\omega}_S^*(t) = \frac{W(t)}{F(t)}\omega_S^*(t), \quad (3.6)$$

waarbij $F(t) = W(t) - H(t)$ financieel kapitaal op leeftijd t weergeeft, en $\omega_P^*(t)$ en $\omega_S^*(t)$ de optimale portefeuillegewichten uitgedrukt in termen van het totale vermogen beschrijven (zie (3.2) en (3.3)).

Het deel van het financiële kapitaal dat wordt belegd in het aandeel is niet constant, maar neemt af met de leeftijd. Dit is consistent met de gangbare kennis ten aanzien van optimaal beleggen (zie ook Bodie, Merton, and Samuelson (1992)). Omdat menselijk kapitaal niet is blootgesteld aan aandelenrisico, zal het individu een groot deel van zijn financiële kapitaal in de aandelenmarkt moeten investeren om de gewenste blootstelling aan aandelenrisico te realiseren. Omdat menselijk kapitaal een steeds kleiner deel uitmaakt van het totale vermogen met het verstrijken van de jaren, zal het deel van het financiële vermogen dat wordt belegd in aandelen – over het algemeen – dalen met de leeftijd.

De hoofdreden voor het individu om in de obligatie te beleggen is renteafdekking. Het individu is al in het bezit van een financiële titel (menselijk kapitaal) die al gedeeltelijk bescherming biedt tegen renterisico. Echter, de ‘duration’ van menselijk kapitaal $D_H(t)$ is doorgaans niet gelijk aan de ‘duration’ van de optimale totale obligatieportefeuille $D_P(t) \equiv \omega_P^*(t)B_r(h) = \phi_r/(\gamma\sigma_r) + D_A(t)$. Als de rentegevoeligheid van menselijk kapitaal kleiner is dan de rentegevoeligheid van de optimale totale obligatieportefeuille, dan geeft menselijk kapitaal onvoldoende bescherming tegen renterisico. Als gevolg hiervan zal het individu een groter gedeelte van zijn financiële vermogen in de obligatie gaan beleggen om de gewenste mate van renteafdekking te realiseren. Andersom geldt dat als de rentegevoeligheid van menselijk kapitaal groter is dan de rentegevoeligheid van de optimale totale obligatieportefeuille, dan geeft menselijk kapitaal juist te veel afdekking tegen renterisico. In dat geval zal het individu een kleiner gedeelte van zijn financiële vermogen in de obligatie gaan beleggen om de gewenste afdekking aan renterisico te bewerkstelligen. Merk op dat de rentegevoeligheid van menselijk kapitaal groter kan zijn dan de rentegevoeligheid van de optimale totale obligatieportefeuille. Dit gebeurt vooral wanneer de risicoaversiteitsparameter klein is en de AOW-uitkering relatief groot is (dus bij kleine aanvullende pensioenen).

Figuur 1 laat zien hoe de optimale renteafdekking afhangt van de risicoaversiteitsparameter, de hoogte van de AOW-uitkering, en de mogelijkheid om de pensioenpremie aan te passen. De verticale as drukt renteafdekking uit op de wijze waarop dit gangbaar is in de pensioensector: het percentage renterisico van het opgebouwde pensioenvermogen dat is afgedekt via beleggingen. Er geldt dat mensen met een relatief hoge AOW-uitkering minder behoefte hebben aan renteafdekking; zie Figuur 1(c) en (d). Voor deze mensen is menselijk kapitaal (waarin AOW-uitkeringen worden meegenomen) relatief groot en hebben dus via menselijk kapitaal al een grote bescherming tegen renterisico. Ook zien we dat mensen met een lage mate van risicoaversiteit minder behoefte hebben aan renteafdekking. Deze mensen hechten namelijk niet zo veel waarde aan een stabiel consumptiepatroon na pensionering; zie Figuur 1(e) en (f). Tot slot merken we op dat een variabele pensioenpremie tot minder renteafdekking leidt; zie Figuur 1(b), (d) en (f).

Figuur 2 laat de tussenberekeningen zien die ten grondslag liggen aan de bepaling van de optimale renteafdekking zoals weergegeven in Figuur 1(a). We leggen nu elke afzonderlijke figuur uit. Figuur 2(a) vergelijkt de duration van een nominaal vaste annuïteit met de duration van de optimale consumptiestroom (optimaal pensioencontract). We concluderen dat de duration van de optimale consumptiestroom lager (groter) is dan de duration van een vaste annuïteit voor jonge (oude) leeftijden. Er spelen hier twee effecten: de speculatieve vraag naar de obligatie (eerste term aan de rechterkant van (3.2)) en de hedging vraag naar de obligatie (tweede term aan de rechterkant van (3.2)). De speculatieve vraag is niet afhankelijk van de leeftijd en zorgt ervoor dat de duration van de optimale consumptiestroom groter is dan de duration van de vaste annuïteit voor oude leeftijden. Het is voor ouderen immers optimaal om een grotere duration te hebben dan de duration van een vaste annuïteit, omdat lange rentes aantrekkelijker zijn dan korte rentes. De hedging vraag is (ongeveer) gelijk aan 80% van de duration van de vaste annuïteit en zorgt ervoor dat de duration van de optimale consumptiestroom lager is dan de duration van de vaste annuïteit voor jonge leeftijden. Deze vraag is niet gelijk aan 100%, omdat het individu bereid is om pensioenen sneller op te nemen als rendementen tegenvallen; alleen individuen met een intertemporele substitutie-elasticiteit van 0 hebben een hedging vraag van 100%.

Figuur 2(b) laat de rentegevoeligheid van het optimale totale vermogen zien uitgedrukt als percentage van de rentegevoeligheid van een nominaal vaste annuïteit. Deze lijn wordt verkregen door de doorgetrokken lijn uit Figuur 2(a) te delen door de streep-stippellijn uit Figuur 2(a).

Figuur 2(c) laat de duration van menselijk kapitaal, de duration van het totale vermogen en de duration van financieel kapitaal zien. We zien dat de duration van menselijk kapitaal kleiner is dan de duration van het totale vermogen. Menselijk kapitaal bevat namelijk premiebetalingen (voor pensionering) en AOW-uitkeringen (na pensionering) terwijl het totale vermogen uitsluitend bestemd is voor betalingen na pensionering. Als gevolg hiervan is de duration van financieel kapitaal relatief groot, omdat de duration van menselijk kapitaal kleiner is dan de duration van het totale vermogen.

Figuur 2(d) laat de rentegevoeligheid van het financiële vermogen zien uitgedrukt als percentage van de rentegevoeligheid van een nominaal vaste annuïteit. Deze lijn wordt verkregen door de streepjeslijn uit Figuur 2(c) te delen door de streep-stippellijn uit Figuur 2(a).

3.3 Niet Verhandelbaar Inflatierisico

We merken op dat de optimale renteafdekking van meer factoren afhankelijk is. [Bilsen et al. \(2020\)](#) onderzoekt de optimale renteafdekking in een model waarin inflatierisico's bestaan en deze risico's niet kunnen worden afgedekt. Figuur 3 laat de optimale renteafdekking zien in een setting met een variabele pensioenpremie en niet verhandelbaar inflatierisico.

3.4 Figuren 1 en 3 uit de Netspar Brief

Zoals gebleken uit dit achtergronddocument bestaat er niet zoiets als één optimale lifecycle voor aandelenrisico en renterisico. Daarom wordt de optimale lifecycle in zowel Figuur 1 als Figuur 3 uit de Netspar Brief weergegeven aan de hand van een gearceerd vlak. Het gearceerde vlak in Figuur 1 wordt bepaald door twee settings te beschouwen: een setting met een vaste pensioenpremie en een setting met een variabele pensioenpremie. In Figuur 2 beschouwen we drie settings:

1. vaste pensioenpremie en verhandelbaar inflatierisico;
2. variabele pensioenpremie en verhandelbaar inflatierisico;
3. en variabele pensioenpremie en niet verhandelbaar inflatierisico.

In beide figuren worden de parameterwaardes gegeven in Sectie 2.4. We concluderen dat de optimale renteafdekking voor jongeren hoog of laag kan zijn afhankelijk van de setting.

Echter voor ouderen vinden we altijd een hoge optimale renteafdekking.

4 Impliciete Lifecycle Strategieën in Collectieve Contracten

In Figuren 2 en 4 uit de Netspar Brief laten we de impliciete lifecycle strategieën in collectieve contracten met een dekkingsgraad zien. We hanteren dezelfde parameterwaardes zoals beschreven in Sectie 2.4. De financiële markt wordt gegeven door Sectie 2.2.

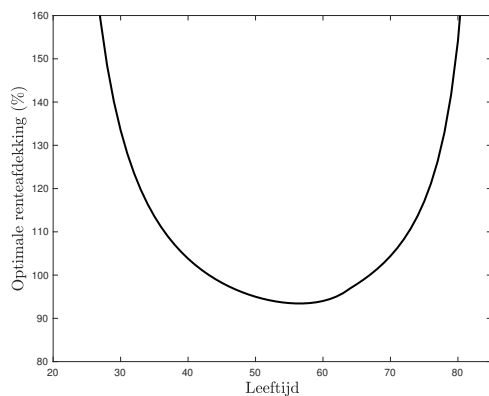
Het onderliggende collectieve contract is als volgt gespecificeerd. De pensioenpremie is vast en bedraagt 20% van de pensioengrondslag. De pensioenopbouw is uniform. Jaarlijks worden schokken in de dekkingsgraad open gespreid. Dat wil zeggen, een schok wordt verwerkt in zowel huidige als toekomstige opbouw. De jaarlijkse indexatie i_t wordt als volgt bepaald:

$$i_t = \frac{F_t - 100\%}{10}, \quad (4.1)$$

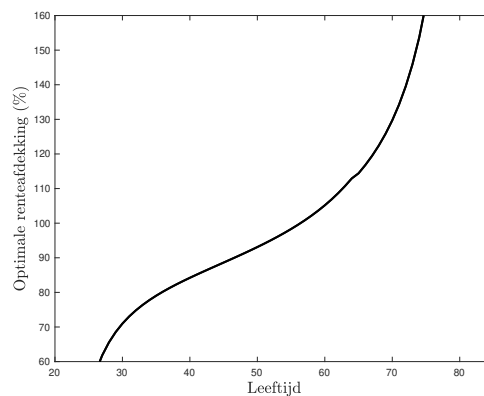
waarbij F_t de dekkingsgraad op tijdstip t voorstelt. We zien dat schokken over een periode van 10 jaar worden uitgesmeerd en dat specifieke FTK-regels (zoals direct afstempelen na een periode van 5 jaar in onderdekking) niet worden meegenomen. Ook worden de backstop-regels uit het principeakkoord vernieuwing pensioenstelsel buiten beschouwing gelaten. Het collectieve vermogen wordt voor 50% in aandelen belegd en 50% van het renterisico op de balans van het pensioenfonds wordt afgedekt.

5 Conclusie

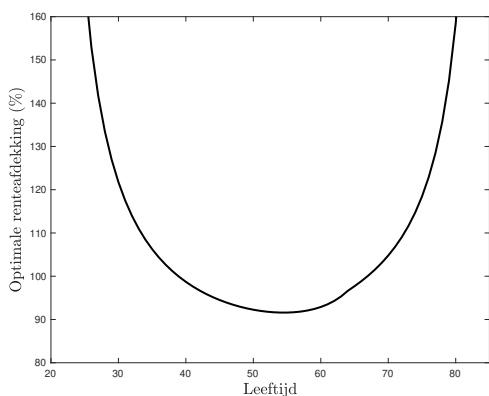
In dit achtergronddocument hebben we laten zien hoe de illustraties ten aanzien van optimaal lifecycle beleggen uit de Netspar Brief “Renterisico, Lifecycle en Pensioencontract” tot stand zijn gekomen. De conclusie is dat alhoewel er niet zoiets bestaat als één optimale lifecycle, ouderen behoefte hebben aan veel renteafdekking.



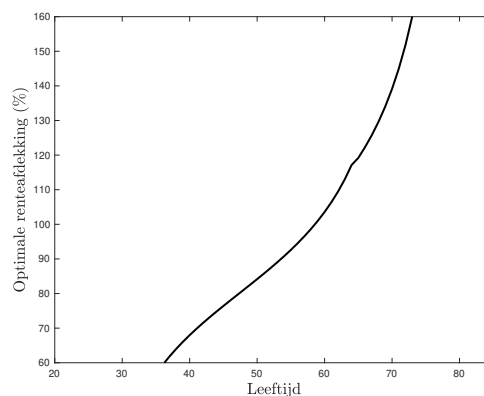
(a) $s = 40\%$, $\gamma = 5$, premie vast



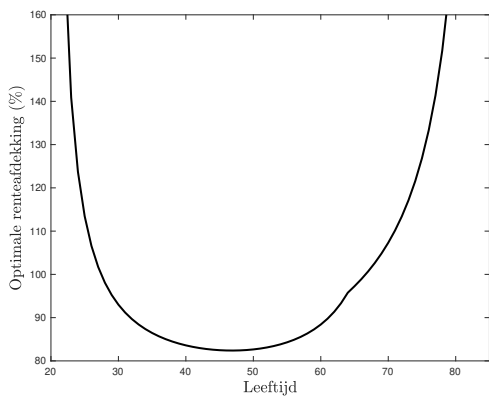
(b) $s = 40\%$, $\gamma = 5$, premie variabel



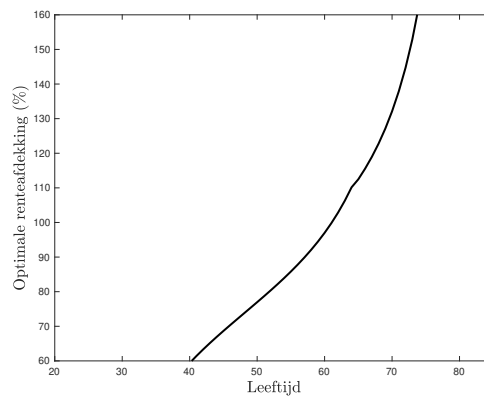
(c) $s = 60\%$, $\gamma = 5$, premie vast



(d) $s = 60\%$, $\gamma = 5$, premie variabel

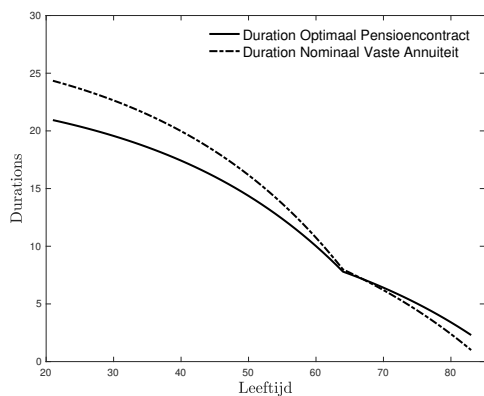


(e) $s = 40\%$, $\gamma = 3$, premie vast

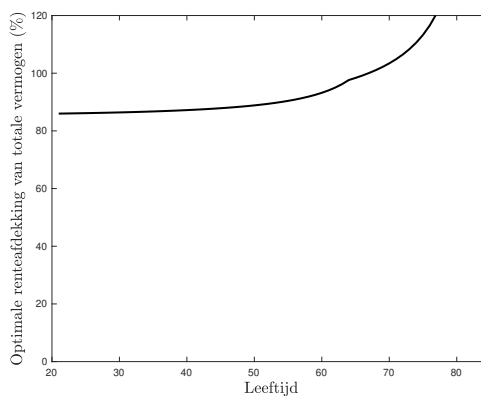


(f) $s = 40\%$, $\gamma = 3$, premie variabel

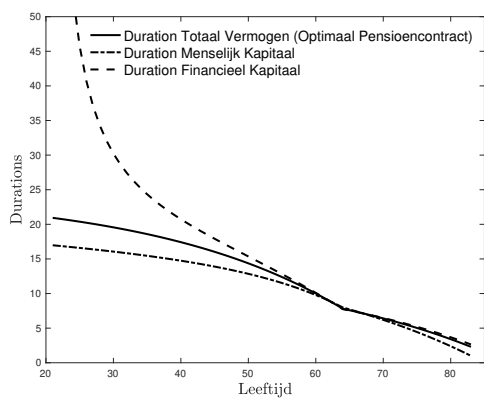
Figure 1. Gevoeligheid van optimale renteafdekking ten aanzien van risicoaversiteitsparameter, de hoogte van de AOW-uitkering, en de mogelijkheid om de pensioenpremie aan te passen. Deze figuur illustreert het optimale renteafdeckingsbeleid voor verschillende waarden van de risicoaversiteitsparameter, verschillende hoogtes van de AOW-uitkering, en de mogelijkheid om de pensioenpremie aan te passen. We noteren met het symbool s de hoogte van de AOW-uitkering als percentage van het arbeidsinkomen. De parameterwaarden worden gegeven in Sectie 2.4.



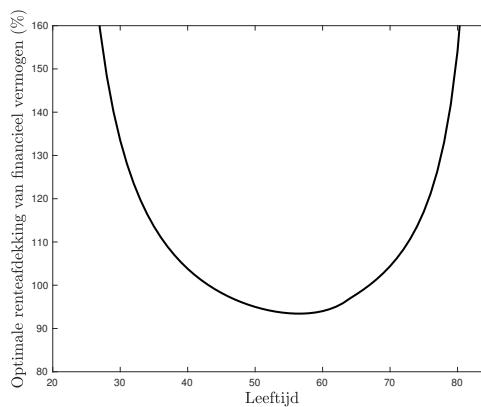
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 2. Tussenberekeningen die ten grondslag liggen aan de berekening van de optimale renteafdekking.

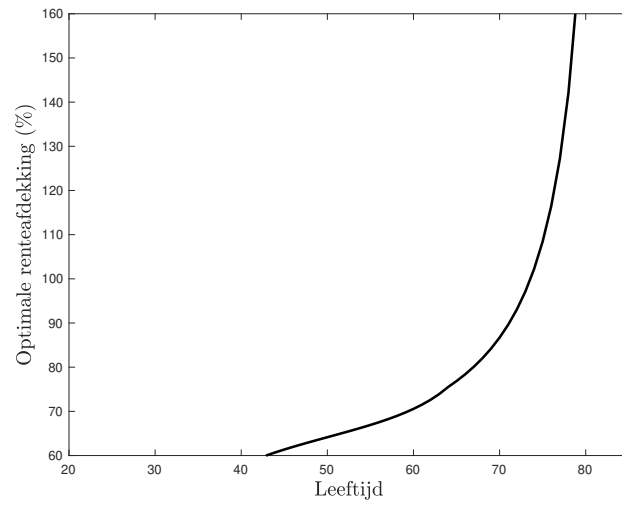


Figure 3. Optimale renteafdekking met niet verhandelbaar inflatierisico. Deze figuur geeft de optimale renteafdekking weer in een setting waarbij inflatierisico niet verhandelbaar is en de pensioenpremie variabel. De parameterwaardes worden gegeven in Sectie 2.4. De volatiliteit van jaarlijkse inflatieschokken is gelijkgesteld aan 1%.

A Bewijzen

A.1 Afleiding van het Proces van de Obligatieprijs

Deze appendix leidt het proces van de obligatieprijs af. We veronderstellen twee toestandsvariabelen: de kortetermijnrente $r(t)$ (met proces (2.2)) en de aandelenprijs $S(t)$ (met proces (2.3)). We kunnen de obligatieprijs $P(t, h)$ als volgt bepalen:

$$\begin{aligned} P(t, h) &= \mathbb{E}_t \left[\frac{M(t+h)}{M(t)} \right] \\ &= \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_0^h (r(t+v) + \frac{1}{2}\phi_r^2 + \rho_{rS}\phi_r\phi_S + \frac{1}{2}\phi_S^2) dv + \phi^\top \int_0^h dZ(t+v)} \right], \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

waarbij \mathbb{E}_t de verwachtingswaarde is gegeven alle beschikbare informatie tot leeftijd t .

Vergelijking (A1) laat zien dat de som van de kortetermijnrentes, dat wil zeggen $\bar{r}(t, h) = \int_0^h r(t+v)dv$, een cruciale rol speelt bij de bepaling van de obligatieprijs. We vinden dat $\bar{r}(t, h)$ wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \bar{r}(t, h) &= \int_0^h r(t+v)dv \\ &= \int_0^h (e^{-\kappa_r v} r(t) + (1 - e^{-\kappa_r v}) \bar{r}) dv + \sigma_r \int_0^h \int_0^v e^{-\kappa_r(v-u)} dZ_r(t+u)dv \\ &= \int_0^h (r(t) + (1 - e^{-\kappa_r v}) (\bar{r} - r(t))) dv + \sigma_r \int_0^h \int_v^h e^{-\kappa_r(h-u)} dudZ_r(t+v) \quad (\text{A2}) \\ &= \int_0^h (r(t) + \kappa_r B_r(v) (\bar{r} - r(t))) dv + \sigma_r \int_0^h \frac{1}{\kappa_r} (1 - e^{-\kappa_r(h-v)}) dZ_r(t+v) \\ &= \int_0^h \mathbb{E}_t [r(t+v)] dv + \sigma_r \int_0^h B_r(h-v) dZ_r(t+v). \end{aligned}$$

De tweede vergelijking in (A2) volgt uit het feit dat

$$\begin{aligned} r(t+v) &= e^{-\kappa_r v} r(t) + (1 - e^{-\kappa_r v}) \bar{r} + \sigma_r \int_0^v e^{-\kappa_r(v-u)} dZ_r(t+u) \\ &= \mathbb{E}_t [r(t+v)] + \sigma_r \int_0^v e^{-\kappa_r(v-u)} dZ_r(t+u). \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Vergelijking (A3) kan worden afgeleid door verschillende substituties uit te voeren. Door

het invullen van (A2) in (A1) vinden we dat

$$\begin{aligned}
P(t, h) &= \exp \left\{ - \int_0^h \left(\mathbb{E}_t [r(t+v)] + \frac{1}{2} \phi_r^2 + \rho_{rS} \phi_r \phi_S + \frac{1}{2} \phi_S^2 \right) dv \right\} \\
&\quad \mathbb{E}_t \left[\exp \left\{ \int_0^h (\phi_r - B_r(h-v) \sigma_r) dZ_r(t+v) + \int_0^h \phi_S dZ_S(t+v) \right\} \right] \\
&= \exp \left\{ - \int_0^h \left(\mathbb{E}_t [r(t+v)] - \lambda_r \sigma_r B_r(v) - \frac{1}{2} B_r^2(v) \sigma_r^2 \right) dv \right\} \\
&= \exp \left\{ - \int_0^h R(t, v) dv \right\},
\end{aligned} \tag{A4}$$

waarbij de forward rente op leeftijd t voor horizon v , $R(t, v)$, als volgt is gedefinieerd:

$$R(t, v) = \mathbb{E}_t [r(t+v)] - \lambda_r \sigma_r B_r(v) - \frac{1}{2} B_r^2(v) \sigma_r^2. \tag{A5}$$

De logaritme van de obligatieprijs wordt gegeven door (dit volgt uit (A4) en (A5))

$$\log P(t, h) = - \int_0^h \left(r(t) + \kappa B_r(v) (\bar{r} - r(t)) - \lambda_r \sigma_r B_r(v) - \frac{1}{2} B_r^2(v) \sigma_r^2 \right) dv. \tag{A6}$$

We vinden na uitwerking van de integraal (A6) dat¹

$$\begin{aligned}
\log P(t, h) &= -r(t)h - (\bar{r} - r(t)) (h - B_r(h)) \\
&\quad + \frac{\lambda_r \sigma_r}{\kappa_r} (h - B_r(h)) + \frac{1}{2} \frac{\sigma_r^2}{\kappa_r^2} \left(h - 2B_r(h) + \frac{1}{2} B_r(2h) \right) \\
&= -r(t)B_r(h) - m(h),
\end{aligned} \tag{A7}$$

waarbij $m(h)$ als volgt is gedefinieerd:

$$m(h) = \left(\bar{r} - \frac{\lambda_r \sigma_r}{\kappa_r} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_r^2}{\kappa_r^2} \right) (h - B_r(h)) + \frac{1}{4\kappa_r} B_r^2(h) \sigma_r^2. \tag{A8}$$

Om uit te rekenen hoe de prijs van een obligatie met vaste uitbetalingsdatum $t+h$ zich ontwikkelt, moeten we de formule van Itô toepassen op

$$P(t, h) = \exp \{ -r(t)B_r(h) - m(h) \}. \tag{A9}$$

¹De eerste gelijkheid volgt uit $B_r^2(v) = (1 - 2e^{-\kappa_r v} + e^{-2\kappa_r v}) / \kappa_r^2$ en de tweede gelijkheid volgt uit $B_r^2(h) = (2B_r(h) - B_r(2h)) / \kappa_r$.

We vinden

$$\begin{aligned}\frac{dP(t, h)}{P(t, h)} &= \left(R(t, h) - \kappa_r B_r(h) (\bar{r} - r(t)) + \frac{1}{2} B_r^2(h) \sigma_r^2 \right) dt - B_r(h) \sigma_r dZ_r(t) \\ &= (r(t) - \lambda_r \sigma_r B_r(h)) dt - B_r(h) \sigma_r dZ_r(t).\end{aligned}\tag{A10}$$

A.2 Afdleiding van de Optimale Strategieën

Deze appendix leidt de optimale strategieën af. We veronderstellen twee toestandsvariabelen: de kortetermijnrente $r(t)$ (met proces (2.2)) en de aandelenprijs $S(t)$ (met proces (2.3)). Verder veronderstellen we dat het individu de mogelijkheid heeft om te beleggen in twee risicovolle titels: een aandeel en een obligatie met vaste looptijd h . Het proces van de obligatieprijs is afgeleid in Appendix A.1.

We beginnen met het afleiden van de optimale consumptie $c^*(t)$. Noteer met \mathcal{L} de Lagrange functie die wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} \frac{1}{1-\gamma} c(t)^{1-\gamma} dt \right] + y \left(W(0) - \mathbb{E} \left[\int_0^T M(t) c(t) dt \right] \right) \\ &= \int_0^T \mathbb{E} \left[e^{-\delta t} \frac{1}{1-\gamma} c(t)^{1-\gamma} - y M(t) c(t) \right] dt + y W(0),\end{aligned}\tag{A11}$$

waarbij $y \geq 0$ de Lagrange-multiplier voorstelt. Het individu wilt graag $e^{-\delta t} \frac{1}{1-\gamma} c(t)^{1-\gamma} - y M(t) c(t)$ maximaliseren. Optimale consumptie moet daarom aan de volgende voorwaarde voldoen:

$$e^{-\delta t} (c^*(t))^{-\gamma} = y M(t).\tag{A12}$$

Nadat we deze conditie hebben opgelost vinden we dat optimale consumptie wordt gegeven door:

$$c^*(t) = (e^{\delta t} y M(t))^{-\frac{1}{\gamma}}.\tag{A13}$$

Tot slot laat [Karatzas and Shreve \(1998\)](#) zien dat de optimale oplossing van de Langrange functie gelijk is aan de optimale oplossing van het originele maximalisatieprobleem.

Invullen van de stochastische verdisconteringsfactor

$M(t) = \exp \left\{ - \int_0^t (r(s) + \frac{1}{2} \phi^\top \rho \phi) ds + \phi^\top \int_0^t dZ(s) \right\}$ in (A13) geeft:

$$c^*(t) = c^*(0) \exp \left\{ \frac{1}{\gamma} \int_0^t \left(r(s) + \frac{1}{2} \phi^\top \rho \phi - \delta \right) ds - \frac{1}{\gamma} \phi^\top \int_0^t dZ(s) \right\}. \quad (\text{A14})$$

We noteren met $V^*(t)$ de marktwaarde op leeftijd t van optimale consumptie. We definiëren $V^*(t)$ als volgt:

$$\begin{aligned} V^*(t) &= \int_0^{T-t} \mathbb{E}_t \left[\frac{M(t+h)}{M(t)} c^*(t+h) \right] dh \\ &= c^*(t) \int_0^{T-t} \mathbb{E}_t \left[\frac{M(t+h)}{M(t)} \frac{c^*(t+h)}{c^*(t)} \right] dh = c^*(t) A^*(t), \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

waarbij $A^*(t)$ de optimale actuariële factor op leeftijd t voorstelt:

$$A^*(t) = \int_0^{T-t} \mathbb{E}_t \left[\frac{M(t+h)}{M(t)} \frac{c^*(t+h)}{c^*(t)} \right] dh = \int_0^{T-t} \exp \{ -d^*(t, h) \} dh. \quad (\text{A16})$$

Hierbij stelt $d^*(t, h)$ de rekenrente voor op leeftijd t voor horizon $h \geq 0$. We kunnen laten zien dat:

$$\begin{aligned} d^*(t, h) &= \frac{1}{h} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \int_0^h \left(r(t) + \kappa_r B_r(v) (\bar{r} - r(t)) + \frac{1}{2} \phi_r^2 + \rho_{rS} \phi_r \phi_S + \frac{1}{2} \phi_S^2 \right) dv \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \int_0^h (\phi_r - B_r(v) \sigma_r)^2 dv \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \rho_{rS} \int_0^h (\phi_r - B_r(v) \sigma_r) \phi_S dv - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2 \phi_S^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A17})$$

$\log V^*(t)$ voldoet aan (dit volgt uit (A13), (A16) en (A17))

$$\begin{aligned} d \log V^*(t) &= d \log c^*(t) + d \log A^*(t) \\ &= (\dots) dt - \left(\frac{1}{\gamma} \phi_r + D_A(t) \sigma_r \right) dZ_r(t) - \frac{1}{\gamma} \phi_S dZ_S(t). \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

Hierbij stelt $D_A(t)$ de actuariële factor voor:

$$D_A(t) = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \int_0^{T-t} \frac{V^*(t, h)}{V^*(t)} B_r(h) dh, \quad (\text{A19})$$

waarbij $V^*(t, h) = c^*(t) \exp \{-d^*(t, h)h\}$.

De logaritme van het totale vermogen voldoet aan:

$$d \log W(t) = (\dots) dt - \omega_P(t) B_r(h) \sigma_r dZ_r(t) + \omega_S(t) \sigma_S dZ_S(t). \quad (\text{A20})$$

Als we (A20) vergelijken met (A18), dan vinden we dat:

$$\omega_P^*(t) = \frac{1}{\gamma} \frac{\phi_r}{B_r(h) \sigma_r} + \frac{D_A(t)}{B_r(h)}, \quad (\text{A21})$$

$$\omega_S^*(t) = -\frac{1}{\gamma} \frac{\phi_S}{\sigma_S}. \quad (\text{A22})$$

A.3 Impact van Menselijk Kapitaal op Optimale Strategieën

Deze appendix onderzoekt de impact van menselijk kapitaal op de optimale portefeuillegewichten. We veronderstellen twee toestandsvariabelen: de kortetermijnrente $r(t)$ (met proces (2.2)) en de aandelenprijs $S(t)$ (met proces (2.3)). Noteer, respectievelijk, met $O(t)$ en $H(t)$ inkomen en menselijk kapitaal op leeftijd t . We definiëren menselijk kapitaal als volgt:

$$H(t) \equiv \int_0^{T-t} H(t, h) dh, \quad (\text{A23})$$

waarbij

$$H(t, h) = \mathbb{E}_t \left[\frac{M(t+h)}{M(t)} O(t+h) \right] \quad (\text{A24})$$

met

$$O(t+h) = \begin{cases} p & \text{if } t+h < T_R \\ s & \text{if } t+h \geq T_R. \end{cases} \quad (\text{A25})$$

Hierbij stelt T_R de pensioengerechtigde leeftijd voor. Verder is p in setting 1 gelijk aan de hoogte van de pensioenpremie en s is de hoogte van de AOW-uitkering. In setting 2 is p gelijk aan het arbeidsinkomen.

We kunnen laten zien dat

$$dH(t) = (r(t) - \lambda_r \sigma_r D_H(t)) H(t) dt - D_H(t) \sigma_r H(t) dZ_r(t) - O(t) dt, \quad (\text{A26})$$

waarbij

$$D_H(t) = \int_0^{T-t} \frac{H(t, h)}{H(t)} B_r(h) dh \quad (\text{A27})$$

de ‘duration’ van menselijk kapitaal voorstelt.

Het financiële vermogen $F(t)$ gedraagt zich als volgt:

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = (\dots) dt - [\widehat{\omega}_P(t) B_r(h) + \widehat{\omega}_S(t) D_S(t)] \sigma_r dZ_r(t) + \widehat{\omega}_S(t) \sigma_D dZ_D(t). \quad (\text{A28})$$

Het totale vermogen $W(t) = H(t) + F(t)$ voldoet dus aan

$$\begin{aligned} dW(t) &= dH(t) + dF(t) \\ &= (\dots) dt + \widehat{\omega}_S(t) \sigma_S \frac{F(t)}{W(t)} W(t) dZ_S(t) \\ &\quad - \left[\widehat{\omega}_P(t) B_r(h) \frac{F(t)}{W(t)} + D_H(t) \frac{H(t)}{W(t)} \right] \sigma_r W(t) dZ_r(t). \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

Als we (2.8) vergelijken met (A29), dan vinden we (3.5) en (3.6).

References

- Bilsen, S. van., I. A. Boelaars, and A. L. Bovenberg. 2020. The Duration Puzzle in Life-Cycle Investment. *Review of Finance* forthcoming.
- Bodie, Z., R. C. Merton, and W. F. Samuelson. 1992. Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 16:427–449.
- Brennan, M. J., and Y. Xia. 2002. Dynamic Asset Allocation under Inflation. *Journal of Finance* 57:1201–1238.
- Gomes, F. J., L. J. Kotlikoff, and L. M. Viceira. 2008. Optimal Life-Cycle Investing with Flexible Labor Supply: A Welfare Analysis of Life-Cycle Funds. *American Economic Review* 98:297–303.
- Karatzas, I., and S. E. Shreve. 1998. *Methods of Mathematical Finance*, vol. 39. Springer.